موضوعة الفصل الثانية T_2:

وهي أنه من أجل أي نقطتين مختلفتين x, y من فضاء طبولوجي X يوجد جوار (U لـ x) وجوار (V لـ y) وهذان الجواران لا يتقاطعان.

أي أنّ: $U \cap V = \Phi$

إنّ الفضاء الذي يحقق هذه الموضوعة يسمّى T_2 أو «فضاء هاوسدورف»

واضح من التعريف أنّ موضوعة الفصل الأولى تنتج من الثانية.

أي أنّ «كل فضاء T_2 هو فضاء T_1»

ولكن العكس غير صحيح

مثال:

لنأخذ فضاء المتممات المنتهية (X, τ) حيث X مجموعة غير منتهية.

- المجموعات المفتوحة في هذا الفضاء هي المجموعات التي متممها منتهية بالإضافة إلى Φ.

وتكون المجموعات المغلقة هي المجموعات المنتهية بالإضافة إلى X.

- هذا الفضاء هو T_1 فضاء، لأنه من أجل أي نقطتين مختلفتين x و y يكون:

* $X \setminus \{x\}$ مفتوحة فهي جوار لـ (y) لا يحوي (x)
* $X \setminus \{y\}$ مفتوحة فهي جوار لـ (x) لا يحوي (y)

المجموعة $\{x\}$ هي مجموعة مغلقة لأنها منتهية.

* ولكنه ليس T_2 فضاء لأنه سبق وبرهنا أنّ:

«أي مجموعتين مفتوحتين غير خاليتين في هذا الفضاء تتقاطعان»

هذا يعني أنّ أي جوارين لأي نقطتين يتقاطعان.

مثال :
أي فضاء متري هو T_2 فضاء.
الحل :
نفرض (X, d) فضاء متري و x, y نقطتين مختلفتين بحيث $x \neq y$ ، عندها
$$d(x, y) = r > 0$$
عندئذٍ يكون $B(x, \frac{r}{2})$ جوار لـ x
و $B(y, \frac{r}{2})$ جوار لـ y
وهذان الجواران لا يتقاطعان أي أنه T_2 فضاء.

ملاحظة :
يبرهن أن الفضاء X يكون فضاء هاوسدورف إذا كان تقاطع جميع الجوارات المغلقة للنقطة x يطابق المجموعة X.
نبرهن شرطاً آخر مكافئ من خلال المبرهنة التالية :

مبرهنة :
ليكن X فضاء طبولوجياً ، الشرط اللازم والكافي ليكون X فضاء هاوسدورف هو أن تكون المجموعة :
$$\Delta = \{ (x, x) \; ; \; x \in X \}$$
مجموعة مغلقة في فضاء الجداء « $X^2 = X \times X$ »
البرهان :
« لزوم الشرط »
نفرض أنّ X فضاء هاوسدورف وسنثبت أنّ Δ مجموعة مغلقة عن طريق إثبات أنّ متممته مفتوحة.
لنأخذ نقطة « $(x, y) \in X^2 \setminus \Delta$ » هذا يعني أنّ $x \neq y$
وبما أن الفضاء هو T_2 إذاً يوجد جوار مفتوح U لـ x

/ /

وجوار مفتوح $\mathcal{V}$ لـ y بحيث: « $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \phi$ »

إن المجموعة $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ هي عنصر من عناصر طبولوجيا الجداء

أي أنّ مجموعة مفتوحة في فضاء الجداء تحوي النقطة (x,y)

أي أنّ:

$$\mathcal{U} \times \mathcal{V} \cap \Delta = \phi$$

ومنه $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ موجودة في المتممة أي أنّ:

« $(x,y) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V} \subseteq X^2 \setminus \Delta$ » ← داخلية

وبما أنّ كيفية فجميع نقاط المتممة داخلية

أي أنّ $X^2 \setminus \Delta$ مفتوحة ← Δ مغلقة

« كفاية الشرط »

نفرض أنّ Δ مجموعة مغلقة ولنثبت أنّ الفضاء هاوسدورف.

نأخذ نقطتين مختلفتين كيفيتين x, y حيث $x \neq y$

هذا يعني أنّ $(x,y) \notin \Delta$ هذا يعني أنّ $(x,y) \in X^2 \setminus \Delta$

ولدينا $X^2 \setminus \Delta$ مجموعة مفتوحة لأنّ Δ مغلقة.

ومنه نجد مجموعة مفتوحة ابتدائية من الشكل: $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$

بحيث النقطة (x,y) تنتمي إليها أي أنّ:

$$(x,y) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V} \subseteq X^2 \setminus \Delta$$

من هنا ينتج أنّ $(x \in \mathcal{U})$, $(y \in \mathcal{V})$ و $\mathcal{U}$ و $\mathcal{V}$ مجموعتان

مفتوحتان في X هذا يعني أنّه:

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \phi$$

هذا يعني أنّ الفضاء يحقق أنّ الفضاء هو T_2.

مبرهنة:

ليكن: $f, g : X \longrightarrow Y$ تطبيقين مستمرين

إذا كان Y فضاء هاوسدورف فإنّ المجموعة A

/ /

$$A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$$

مغلقة في X.

«إذا تساوت دالتان مستمرتان على مجموعة ما فإن هذه المجموعة مغلقة حتماً»

البرهان:

نبني تطبيقاً جديداً $\gamma : X \longrightarrow Y^2 = Y \times Y$

$\gamma : x \longrightarrow (f(x), g(x))$

إن التطبيق γ مستمر استناداً إلى مبرهنة سابقة.

مع ملاحظة أن تطبيق الإسقاط:

$P_1 \circ \gamma = f$ ، f مستمر } γ مستمر

$P_2 \circ \gamma = g$ ، g مستمر

وبما أن Y فضاء هاوسدورف فإن المجموعة Δ

$$\Delta = \{(y, y) ; y \in Y\}$$

هي مجموعة مغلقة في (Y^2)

وبما أن Δ مغلقة، γ مستمر فإن الصورة العكسية لـ Δ وفق γ تكون مجموعة مغلقة أي أن: $(\gamma^{-1}(\Delta))$ مغلقة

ولكن $(\gamma^{-1}(\Delta))$ هي مجموعة النقاط التي يتساوى عليها صورة x أي $f(x) = g(x)$ ⟵ فهي المجموعة A فهي مغلقة.

نتيجة:

إذا كان لدينا تطبيقان مستمران من فضاء X إلى فضاء هاوسدورف، وإذا تساوى هذان التطبيقان على مجموعة كثيفة من X فإنهما يتطابقان على X.

«ويسمى مبدأ تمديد التطابقات»

ملاحظة:

إنّ الفضاءات T_0 ، T_1 ، T_2 تمتلك مفاهيماً مشتركة سندرس أهمّها وسنرمز لها مجتمعةً بالرمز فضاء T_i
حيث " $i=0,1,2,\dots$ "

مبرهنة:

ليكن X فضاءً طوبولوجياً، إنّ القضيتين التاليتين متكافئتان:

1- X هو فضاء T_i $(i=0,1,2,\dots)$

2- يوجد تطبيق مستمر f بحيث: f منطلقه x ومستقره فضاء T_i محقق الخاصة " $f(x) \neq f(y)$ " من أجل أي نقطتين مختلفتين x و y.
(حيث التطبيق f يتعلق بـ x و y وقد يتغيّر بتغيّرهما)

البرهان:

$(1 \Rightarrow 2)$

إنّ التطبيق المطابق $I: X \to X$ يحقق كل الشروط المطلوبة.

$(2 \Rightarrow 1)$

من أجل أي نقطتين x ، y بحيث $f(x) \neq f(y)$ لأنه متباين.
إذا كانّ H جواراً لـ $f(x)$ في المستقر لا يحوي $f(y)$
فإنّ $f^{-1}(H)$ جوار لـ x لا يحوي y
إذا كان H جوار لـ $f(x)$ في المستقر لا يحوي $f(y)$
و g جواراً لـ $f(y)$ في المستقر لا يحوي $f(x)$
فإنّ $f^{-1}(H)$ جوار لـ x لا يحوي y
$f^{-1}(g)$ جوار لـ y لا يحوي x.
وأخيراً، إذا كان H و g جوارين للنقطتين $f(x)$ ، $f(y)$ غير متقاطعين فإنّ $f^{-1}(H)$ و $f^{-1}(g)$ جوارين لـ x و y غير متقاطعين.

/ /

نتائج :

1- إنّ كون الفضاء الطبولوجي X هو T_i - فضاء $(i=0,1,2,\ldots)$ هي صفة طبولوجية له.

بمعنى أنه إذا كان الفضاءان X_1 و X_2 متكافئين أي (بينهما هوميومورفيزم) وإذا كان أحدهما T_i - فضاء فإنّ الآخر يكون T_i - فضاء.

2- كون الفضاء T_i - فضاء هي صفة وراثية له

بمعنى :

مبرهنة :

إذا كان X هو T_i - فضاء فإنّ أي فضاء جزئي منه A يكون أيضاً T_i - فضاء.

البرهان :

نأخذ تطبيق الإدخال : $I_A : A \longrightarrow X$ هو مقصور تطبيق المطابق : $I_A(x) = x$

هذا التطبيق متباين ومستمر ، مستمره T_i - فضاء وبالتالي استناداً إلى المبرهنة أنّ A هو T_i - فضاء.